$\Bbbk$-代数的零张量因子*

林 霞[1]， 李长远[2,**]，刘雨喆[1] ，赵 伟[3]

（1.贵州大学数学与统计学院，贵州 贵阳 550025；2.首都师范大学数学科学学院，北京 100048；
3.阿坝师范学院数学学院，四川 汶川 623002）

摘要：对定义在域$\Bbbk$上的$\Bbbk$-代数A，本文考虑了两个问题：代数A上的张量积$M\otimes_A N$为 0 时，何时能导出$M=0$或$N=0$；代数上的张量积$M\otimes_A N$中的元素$m\otimes n$为 0 时，何时能导出$m=0$或$n=0$。本文引入了强/弱零张量因子的概念，并利用箭图方法对此进行了回答。具体地说，对只包含至多 1 个loop的连通代数A，有如下两个结论: (1) A含强零张量因子当且仅当其箭图顶点数大于或等于 2，也当且仅当A的箭图不是loop; (2) A无弱零张量因子，则它的维数无限。

关键词：箭图表示，张量，零张量因子，维数。

中图分类号：O153.3; O151.26; O151.23　　　　　　　文字标识码：A

The zero tensor-divisors of $\Bbbk$-algebras*

LIN Xia[1], LI Changyuan[2], LIU YuZhe[1], ZHAO Wei[3]

（1. Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang, Guizhou 550025;
2. School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing 100048;
3. School of Mathematics, Aba Teachers University, Wenchuan, Sichuan, 623002）

Abstract: Let A be a $\Bbbk$-algebra defined over a field $\Bbbk$. This paper consider the two questions: If the tensor $M\otimes_A N$ on A is zero, under what situation is either $M=0$ or $N=0$? If the element, say $m\otimes n$, in $M\otimes_A N$ is zero, under what situation is either $m=0$ or $n=0$? We introduce strong/weak zero-tensor-divisors in this paper and provide a solution of the above questions by quiver methods. To be precise, assume that A is a connected algebra whose quiver contains at most one loop, then we have two results as follows: (1) the following are equivalent: A has strong zero-tensor-divisors, the number of vertices of its quiver is greater than or equal to 2, the quiver of A is not a loop; (2) if A does not have weak zero-tensor-divisors then its dimension is infinite.

Keywords: quiver representations; tensors; zero-tensor-divisors; dimensions.

CLC：O153.3; O151.26; O151.23　　　　　　　DC：A

0 引 言

张量是多线性代数中的核心概念，最初指的是环的张量，其最早可以追溯到 Frobenius 对群表示的研究。张量 (尤其是代数以及模的张量) 在数学，应用数学乃至物理等其它领域的研究中占据极其重要的地位，因此张量总是受到广泛关注。令A是环，右A-模M和左A-模N的张量$M\otimes_A N$本质上是 Abel 群$M\times N$的一种商群，特别地，当M和N还分别具有左A'-模和右A''-模结构时 (这里，A'和A''也是有限维代数)，那么$M\otimes_A N$自然具有左A'右A''-双模结构，因此自然地看作左$A''^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk} A'$-模或者右$A''\otimes_{\Bbbk} A'^{\mathrm{op}}$模，其中$A''^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk} A'$和$A''\otimes_{\Bbbk} A'^{\mathrm{op}}$是环的张量，也称张量环。对张量环上的模展开系统性的研究是环与代数领域中的重要内容，包括张量代数的箭图表示[1]，Clebsch-Gordon 问题[2，3，4，5]，表示型问题[6，7]，代数的同调/Hochschild 同调性质[8，9，10，11，12]等。

众所周知，当A是交换环时，A上的左/右模自然地看成A上的左A右A-双模 (并常常简称为A-模) 。此时，在同构意义下，A-模的张量具有交换性，即$M\otimes_A N\cong N\otimes_A M$。但对于$M\otimes_A N$中的元素$m\otimes n$而言，通常不满足$m\otimes n=n\otimes m$。另一方面，将$A$视为定义在自身上的$A$-模时，有$A\otimes_A A\cong A$，该同构由$x\otimes y\mapsto xy$自然给出，即，$A\otimes_A A$中的张量乘法由$A$上的乘法给出。从该角度来看，张量乘法是一种广义的乘法，且当A是无零因子环时，$A\otimes_A A$中的元素$m\otimes n$等于 0 当且仅当$m=0$或$n=0$。然而，对定义在A上的一般的张量积$M\otimes_A N$中:

收稿日期：2023-10-06

*国家自然科学基金项目 (12061001，12171207); 贵州大学引进人才科研启动基金项目 (贵大人基合字(2022)53 号，(2022)65 号) 资助.

**通信作者：2210502106@cnu.edu.cn

- $m\otimes n=0$未必能导出$m=0$或$n=0$ (例如本文的**例 1**(1)) 。
- 类似地，$M\otimes_A N=0$未必能导出$M=0$或$N=0$。

于是，我们可以自然地提出如下问题:

问题 1. 当环A满足什么条件时，对A上的任意右A-模M和左A-模N，$M\otimes_A N$中的元素$m\otimes n=0$蕴含$m=0$或$n=0$?

问题 2. 当环A满足什么条件时, 对A上的任意右A-模M和左A-模N，$M\otimes_A N=0$蕴含$M=0$或$N=0$?

本文将在A是$\Bbbk$-代数的情形下，回答上面问题。并且，为叙述方便，本文定义: 环A的强零张量因子是非零左A-模N (分别地，右A-模M) 使得存在非零右A-模M (分别地，非零左A-模N) 满足$M\otimes_A N=0$; 环A的弱零张量因子是非零左A-模N (分别地，右A-模M) 中的非零元素n (分别地，非零元素m) 使得存在非零右A-模M (分别地，非零左A-模N) 中的非零元素m (分别地，非零元素n) 满足$m\otimes n=0$ (见**定义 1**，**定义 2**)。此外，本文自此开始，总是做出如下约定: $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$是域$\Bbbk$上的基代数 (basic algebra，即对$A$的完全本原正交幂等元组$\{e_i\mid 1\le i\le n\}$，始终有$e_iA\ncong e_jA$，$\forall i\ne j$); 箭图$\mathcal{Q}=(\mathcal{Q}_0,\mathcal{Q}_1,\mathfrak{s},\mathfrak{t})$是有限连通箭图，其中$\mathfrak{s},\mathfrak{t}:\mathcal{Q}_1\to\mathcal{Q}_0$将箭向$a$映射分别为$a$的起点和终点; $\mathcal{I}$是 admissible 理想; 所考虑的A上的模均是有限生成模，且对$\mathcal{Q}$上的箭向a，b，其复合在$\mathfrak{t}(a)=\mathfrak{s}(b)$的情形下记作$ab$。

本文主要结果如下:

主定理. 设$\Bbbk$-代数$A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$非单，其箭图连通且只包含至多 1 个 loop。

(1) 如果A是有限维代数，则下面论述等价:

(a) A是含强零张量因子代数;

(b) $\#\mathcal{Q}_0\ge 2$ (对集合S，记号$\#S$表示它的元素个数);

(c) $\mathcal{Q}$或者包含一个 loop 为真子箭图，或者不含 loop。

(2) 如果A是无弱零张量因子代数，则A是无限维代数。

主定理(1)在A是非单的有限维代数，其箭图连通且只包含 1 个 loop 的情形下，对问题 2 进行了回答。主定理(2)则指出，有限维代数A总含有弱零张量因子，这意味着我们在有限维代数的情形下完全否定了问题 1. 需要指出的是，非单的无弱零张量因子代数是存在的，见**例 5**。

本文结构如下：第 1 节，本文引入零张量因子的概念。第 2 节，本文考虑有限维$\Bbbk$-代数上的强/弱零张量因子的存在性。第 3 节是本文的主要结果。

1 零张量因子

1.1 模的张量

给定环R和定义在R上的右R-模$M_R=M$与左R-模${}_RN=N$。M和N的R-张量是一个由 Abel 群$M\otimes_R N$和R-双线性函数$T:M\times N\to M\otimes_R N$构成的二元组$(M\otimes_R N,f)$，使得对任意给定的 Abel 群$G$和任意给定的$R$-双线性函数$\tilde{T}:M\times N\to G$，总存在唯一的$\mathbb{Z}$-模同态$f:M\otimes_R N\to G$使得$fT=\tilde{T}$。

张量运算满足双线性，因此，若$M=\langle m_i\mid i\in I\rangle$，$N=\langle n_j\mid j\in J\rangle$，则$M\otimes_R N$中的任意元素$m\otimes n$ (不失一般性地，设$m=\sum_{i\in I}m_ir_i$，$n=\sum_{j\in J}s_jn_j$，其中，$r_i,s_j\in R$) 总可以展开为:

$$m\otimes n=\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}m_ir_i\otimes s_jn_j=\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}m_i\otimes r_is_jn_j\overset{r_is_jn_j=n'_{ij}}{=\!=\!=}\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}m_i\otimes n'_{ij}\,.$$

即，$M\otimes_R N$中的元素总形如$\sum_{i=1}^{t}m_i\otimes n_i$，其中$m_1,\ldots,m_t\in M$，$n_1,\ldots,n_t\in N$。

例 1. (1) 对张量$M\otimes_R N$中的元素$m\otimes n$而言，$m\otimes n=0$无法推出$m=0$或$n=0$。例如取$R=\left(\begin{smallmatrix}\Bbbk & \Bbbk\\ 0 & \Bbbk\end{smallmatrix}\right)$是域$\Bbbk$上的$2\times 2$的上三角矩阵代数，易见，在同构意义下，$R$上有三个不可分解右$R$-模

$$M_1=\begin{pmatrix}\Bbbk & \Bbbk\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Bbbk\end{pmatrix}\cong M_2=\begin{pmatrix}0 & \Bbbk\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ M_1/M_2$$

以及三个不可分解左 R-模

$$\begin{pmatrix}\Bbbk & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cong N_1=\begin{pmatrix}0 & \Bbbk\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ N_2=\begin{pmatrix}0 & \Bbbk\\ 0 & \Bbbk\end{pmatrix},\ N_2/N_1。$$

我们考虑 $M_1/M_2 \otimes_R N_2/N_1$。注意 M_1/M_2 和 N_2/N_1 中的元素分别是形如 $m=\left(\begin{smallmatrix}x & y\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)+M_2$ 和 $n=\left(\begin{smallmatrix}0 & u\\ 0 & v\end{smallmatrix}\right)+N_1$ 和的陪集，于是 $m\otimes n=\left(\begin{smallmatrix}x & y\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0 & u\\ 0 & v\end{smallmatrix}\right)+M_2+N_1+M_2N_1$。注意，作为集合，$M_2=N_1=\left(\begin{smallmatrix}0 & \Bbbk\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ 是 $M_1/M_2\otimes_R N_2/N_1$ (作为 $\Bbbk$-向量空间) 中的零向量 $0_{M_1/M_2\otimes_R N_2/N_1}$，且 $M_2N_1=0$。因此，上式等于 $\left(\begin{smallmatrix}0 & xu+yv\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}0 & \Bbbk\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0 & \Bbbk\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)=0_{M_1/M_2\otimes_R N_2/N_1}$。然而，在 M_1/M_2 和 N_2/N_1 中，m 和 n 都不是零元素。

(2) 注意(1)中的 m 和 n 的任意性，可知 $M_1/M_2\otimes_R N_2/N_1=0$。

1.2 零张量因子

本节我们引入零张量因子的概念。

定义 1. 设 R 是环。如果存在有限生成右 R-模 $M=M_R\neq 0$ 和有限生成左 R-模 $N={}_RN\neq 0$，使得 $M\otimes_R N=0$，则称 M 和 N 是环 R 的*强零张量因子* (strong zero-tensor-divisor)。如果环 R 没有强零张量因子 (即对任意的有限生成右 R-模 M 和左 R-模 N，$M\otimes_R N=0$ 蕴含 $M=0$ 或者 $N=0$)，则称 R 是*无强零张量因子环*; 反之称为*含强零张量因子环*。

注记. [1，第二章. 命题 2.45]给出了张量的具体构造方式。

例 2. (1) 域是无强零张量因子环。考虑域 $\mathbb{F}$ 上的任意两个有限生成 $\mathbb{F}$-模 V 和 W，有 $\mathbb{F}$-线性同构 $V\cong\mathbb{F}^v$ 以及 $W\cong\mathbb{F}^w$，其中 $v,w\in\mathbb{N}_+$。于是 $V\otimes_{\mathbb{F}}W\cong\mathbb{F}^{vw}$。显然，$V\otimes_{\mathbb{F}}W=0$ 当且仅当 $vw=0$，所以 $V=0$ 或 $W=0$。

(2) 类似于(1)，可以证明无零因子环一定是无强零张量因子环。

定义 2. 设 R 是环。如果存在有限生成右 R-模 $M=M_R\neq 0$ 和有限生成左 R-模 $N={}_RN\neq 0$，使得存在 M,N 中的非零元素 m,n，有 $m\otimes n\in M\otimes_R N$ 等于 0，则称 M 和 N 是环 R 的*弱零张量因子*(weak zero-tensor-divisor)。如果环 R 没有弱零张量因子 (即对任意的有限生成右 R-模 M 和左 R-模 N，如果 $m\otimes n\in M\otimes_R N$ 等于 0，则 $m=0$ 或者 $n=0$)，则称 R 是*无弱零张量因子环*; 反之称为*含弱零张量因子环*。

例 3. (1) 取 R 是**例 1** (1)中给定的上三角矩阵代数。在**例 1** (1)中我们在非零右 R-模 M_1/M_2 和非零左 R-模 N_2/N_1 中构造了两个非零元素，它们的张量为零，由此可知 R 是含弱零张量因子环。我们在**例 1** (2)中进一步指出了构造具备任意性，从而得到 $M_1/M_2\otimes_R N_2/N_1=0$。由此可见 R 也是含强零张量因子环。

(2) 无弱零张量因子环是无零因子环。事实上，反设无弱零张量因子环 R 含有零因子 $r_1\neq 0$ 和 $r_2\neq 0$，则 R 作为自身上的右-R 模和左 R-模时，有 $0=r_1\otimes r_2\in R\otimes_R R$。然而，同构 $\sigma: R\otimes_R R\xrightarrow{\cong}R$，$\sigma(r\otimes r')=rr'$ 指出 $0=\sigma(r_1\otimes r_2)=r_1r_2$。这就构造了非零右-$R$ 模 R_R 和非零左 R-模 ${}_RR$，使得 $R\otimes_R R$ 中有弱零张量因子，进而与假设矛盾。

命题 1. *含强零张量因子环一定是含弱零张量因子环。*

证. 设 R 是含是强零因子环，则存在有限生成右 R-模 $M=M_R\neq 0$ 和有限生成左 R-模 $N={}_RN\neq 0$，使得 $M\otimes_R N=0$。由 $M\neq 0$ 和 $N\neq 0$ 可知存在 $0\neq m\in M$ 和 $0\neq n\in N$，使得 $m\otimes n\in M\otimes_R N=0$，即 $m\otimes n=0$。这说明 R 是含弱零张量因子环。□

注记. 事实上，根据例 4 和例 2 (2)，可知无弱零张量因子环是无强零张量因子环。该结论是命题 1 的逆否命题。

命题 2. *设 $\Bbbk$ 是域，$R=\Bbbk[x]$ 是 $\Bbbk$ 上的一元多项式环。*

(1) *R 是含弱零张量因子环。*

(2) 进一步地，如果 $\Bbbk$ 是代数闭域，则 R 是无强零张量因子环。

证. 本证明中令 $\Bbbk$ 是域，并令 $R=\Bbbk[x]$ 是 $\Bbbk$ 上的一元多项式环。则任意有限生成的 R-模 V 是有限维 $\Bbbk$-向量空间，其可以通过箭图 $x\circlearrowright 1$ 表为二元组 $(V\cong_{\Bbbk}\Bbbk^m,\boldsymbol{\Phi}_x\in \mathrm{Mat}_m(\Bbbk))$，其中，记号"$\cong_{\Bbbk}$"表示作为 $\Bbbk$-向量空间的同构，$\mathrm{Mat}_m(\Bbbk)$ 表示域 $\Bbbk$ 上的 m 阶方阵构成的全矩阵环，右 R-作用 $\Bbbk^m\times R\to\Bbbk^m$ 由 $\boldsymbol{v}\cdot x:=\boldsymbol{\Phi}_x(\boldsymbol{v})$ 给出。

(1) 考虑二元组 $(\Bbbk^m,\boldsymbol{J}_m(\lambda))$ 和 $(\Bbbk^n,\boldsymbol{J}_n(\mu))$，其中，$\boldsymbol{J}_t(\lambda)$ 表示 $t\times t$ 的特征值 λ 的 Jordan 块 (假定是上 Jordan 块)，且 $m<n$。则 $\boldsymbol{J}_m(\lambda)$ 有 (极小的) 零化多项式 $\mathfrak{m}_{J_m(\lambda)}(x)=(x-\lambda)^m$。由 $m<n$ 可知 $\mathfrak{m}_{J_m(\lambda)}(x)$ 不是 $\boldsymbol{J}_n(\mu)$ 的零化多项式。因此，对 $\mathfrak{m}_{J_m(\lambda)}(x)\in R$ 以及任意的 $0\neq w\in\Bbbk^n$，有 $\boldsymbol{0}\neq\mathfrak{m}_{J_m(\lambda)}(x)\cdot\boldsymbol{w}=\ \mathfrak{m}_{J_m(\lambda)}(\boldsymbol{J}_n(\mu))\cdot(\boldsymbol{w})\in\Bbbk^n$。任取 $0\neq v\in\Bbbk^m$，就得:

$$\boldsymbol{v}\otimes(\mathfrak{m}_{J_m(\lambda)}\cdot\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{v}\cdot\mathfrak{m}_{J_m(\lambda)})\otimes\boldsymbol{w}=(\mathfrak{m}_{J_m(\lambda)}(\boldsymbol{J}_m(\lambda))\boldsymbol{v})\otimes\boldsymbol{w}=0\otimes\boldsymbol{w}=0\text{。}$$

这样我们就构造了 R 的弱零张量因子 $0\neq v\in\Bbbk^m$ 和 $0\neq\mathfrak{m}_{J_m(\lambda)}(x)\cdot\boldsymbol{w}\in\Bbbk^n$。

(2) 当 $\Bbbk$ 是代数闭域时，注意任意 $m\times m$ 的矩阵 $\boldsymbol{\Phi}\in\mathrm{Mat}_m(\Bbbk)$ 可以相似于 Jordan 标准型，因此有限生成的不可分解 R-模对应的箭图表示总是形如 $(\Bbbk^m,\boldsymbol{J}_m(\lambda))$。任取两个非零箭图表示 $(\Bbbk^m,\boldsymbol{J}_m(\lambda))$ 和 $(\Bbbk^n,\boldsymbol{J}_n(\mu))$，它们给定了两个不可分解 R-模 $\Bbbk^m$ 和 $\Bbbk^n$。下面证明 $\Bbbk^m\otimes_R\Bbbk^n\neq 0$。

设 $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m$ 是 $\Bbbk^m$ 的标准正交基，$\boldsymbol{f}_1,\ldots,\boldsymbol{f}_n$ 是 $\Bbbk^n$ 的标准正交基。则有右 R-模同构

$$\sigma:\Bbbk^m\xrightarrow{\cong_R}\sum\nolimits_{i\leq m-1}\Bbbk x^i=\Bbbk\varepsilon_1+\Bbbk x+\cdots+\Bbbk x^{m-1},$$

$$\sum\nolimits_{t=1}^m k_t\boldsymbol{e}_t\mapsto(\lambda k_1+k_2)\varepsilon_1+\cdots+(\lambda k_{m-1}+k_m)x^{m-2}+\lambda k_m x^{m-1}$$

以及左 R-模同构

$$\tau:\Bbbk^n\xrightarrow{\cong_R}\sum\nolimits_{j\leq n-1}\Bbbk x^j=\Bbbk\varepsilon_1+\Bbbk x+\cdots+\Bbbk x^{n-1},$$

$$\sum\nolimits_{t=1}^n k_t\boldsymbol{f}_t\mapsto(\mu k_1+k_2)\varepsilon_1+\cdots+(\mu k_{n-1}+k_n)x^{n-2}+\mu k_n x^{n-1}.$$

于是，

$$\Bbbk^m\otimes_R\Bbbk^n\cong\left(\sum\nolimits_{i\leq m-1}\Bbbk x^i\right)\otimes_R\left(\sum\nolimits_{j\leq n-1}\Bbbk x^j\right)=\sum_{\substack{i\leq m-1\\ j\leq n-1}}\Bbbk x^i\otimes x^j=\sum_{\substack{i\leq m-1\\ j\leq n-1}}\Bbbk x^{i+j}x\neq 0.$$

因此，对任意非零的有限生成 R-模 V 和 W，它们有形如 $\Bbbk^m$ 和 $\Bbbk^n$ 的非零直和项 (其作为 R-模，R-作用由 Jordan 块诱导)，满足 $\Bbbk^m\otimes_R\Bbbk^n\neq 0$，从而 $V\otimes_R W$ 非零。□

2 代数的零张量因子性

设 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是有限维的基本 $\Bbbk$-代数 ($\mathcal{Q}$ 是连通箭图，$\mathcal{I}$ 是 admissible 理想)，M_A 和 ${}_AN$ 分别是有限生成的右 A-模和左 A-模。则根据唯一分解定理，可设二者的完全直和分解分别为 $M\cong\bigoplus_{i=1}^m M^{(i)}$ 和 $N\cong\bigoplus_{j=1}^n N^{(j)}$。则:

$$M\underset{A}{\otimes}N\cong\Big(\bigoplus_{i=1}^m M^{(i)}\Big)\underset{A}{\otimes}\Big(\bigoplus_{j=1}^n N^{(j)}\Big)\cong\bigoplus_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}\Big(M^{(i)}\underset{A}{\otimes}N^{(j)}\Big).$$

显见 $M\underset{A}{\otimes}N=0$ 当且仅当 $M^{(i)}\underset{A}{\otimes}N^{(j)}=0$。因此，对张量 $M\underset{A}{\otimes}N$ 的研究，转变为对 A 上的右不可分解模和左不可分解模的张量的研究。本节对张量的讨论始假设为是对不可分解模的张量展开的。

2.1 有限维代数的含/无强零张量因子性.

接下来，我们给一个引理，该引理指出: 在满足特定条件时，$(\mathcal{Q},\mathcal{I})$ 的子箭图 $(\mathcal{Q}',\mathcal{I}'=0)$ 的表示可以自然地视为 $(\mathcal{Q},\mathcal{I})$ 的表示。为此，我们先引入求和分量的概念。令 $\sum_{i\in I}k_i\wp_i\in\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{I}$ 的一个生成元，其中，I 是指标集，$k_i\in\Bbbk$，对任意 $i,j\in I$，$\mathfrak{s}(\wp_i)=\mathfrak{s}(\wp_j)$ 和 $\mathfrak{t}(\wp_i)=\mathfrak{t}(\wp_j)$ 成立。则 $\sum_{i\in I}k_i\wp_i$ 的去

系数求和分量 (decoefficient component，简称求和分量) 指的是其作为 $\Bbbk\mathcal{Q}$ 中向量时的非零求和项 $k_i\wp_i$ 所对应的基向量 $\wp_i$.

引理 1. 设有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图 $\mathcal{Q}$ 包含 $\mathbb{A}_n$ 型子箭图 $\mathcal{Q}'=1\xrightarrow{\alpha_1}2\xrightarrow{\alpha_2}\cdots\xrightarrow{\alpha_{n-1}}n$，使得对任意 $\mathcal{I}$ 的生成元 $\sum_{i\in I}k_i\wp_i$ (其中 I 是指标集，且 $\mathfrak{s}(\wp_i)=\mathfrak{s}(\wp_j)$ 和 $\mathfrak{t}(\wp_i)=\mathfrak{t}(\wp_j)$ 对 $i\neq j$ 始终成立)，$\wp=\alpha_1\cdots\alpha_n$ 的任意子路径始终不是 $\sum_{i\in I}k_i\wp_i$ 的求和分量。则存在 $\Bbbk$-范畴的嵌入

$$_{\text{emb}}\boldsymbol{F}:\Bbbk\mathcal{Q}'\text{-mod}\to A\text{-mod} \text{ 以及 } \boldsymbol{F}_{\text{emb}}:\text{mod-}\Bbbk\mathcal{Q}'\to\text{mod-}A,$$

该嵌入自然地将左/右 $\Bbbk\mathcal{Q}'$-模视作左/右 A-模。

证. 由假设可知对任意 $1\le\imath<\jmath\le n$，$\mathcal{Q}'|_{[\imath,\jmath]}=\imath\xrightarrow{\alpha_\imath}\cdots\xrightarrow{\alpha_{\jmath-1}}\jmath$ 上的路径 $\wp_{[\imath,\jmath]}=\alpha_\imath\cdots\alpha_{\jmath-1}$ 不是 $\mathcal{I}$ 的任何生成元的求和分量，因此对任意非零右 $\Bbbk\mathcal{Q}'$-模 M，定义 M 是满足

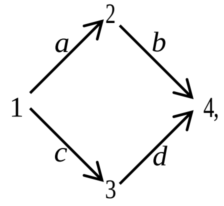
$$\dim_{\Bbbk}M\varepsilon_t=\begin{cases}\dim_{\Bbbk}M\varepsilon_t, & \text{如果}t\in\mathbb{N}_{[\imath,\jmath]};\\ 0, & \text{其它情形}\end{cases}$$

以及

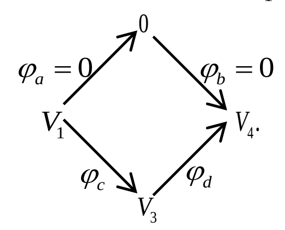
$$\varphi_\alpha:M\varepsilon_s\to M\varepsilon_t,\quad m\varepsilon_s\mapsto\varphi_\alpha(m\varepsilon_t)=\begin{cases}\varphi_{\alpha_t}(m\varepsilon_t), & \text{如果}\alpha=\alpha_t\ (\imath\le t\le\jmath);\\ 0, & \text{其它情形}\end{cases}$$

的 $(\sharp\mathcal{Q}_0+\sharp\mathcal{Q}_1)$-元组 $(M\varepsilon_t,\alpha)_{t\in\mathcal{Q}_0,\alpha\in\mathcal{Q}_1}$，作为 $\Bbbk$-向量空间的直和 $\bigoplus\limits_{t\in\mathcal{Q}_0}M\varepsilon_t=\bigoplus\limits_{\imath\le t\le\jmath}M\varepsilon_t$ (仍记作 M) 按上述条件自然诱导了一个右 $\Bbbk\mathcal{Q}$-作用 $M\times\Bbbk\mathcal{Q}\to M$，于是 M 是一个右 $\Bbbk\mathcal{Q}$-模。对任意 $\sum_{i\in I}k_i\wp_i\in\mathcal{I}$，记 $\wp_i=\alpha_i^{(\ell_i)}\alpha_i^{(\ell_i-1)}\cdots\alpha_i^{(1)}$，$\Bbbk$-线性映射 $\varphi_{\sum_{i\in I}k_i\wp_i}:=\sum_{i\in I}k_i\varphi_{\alpha_i^{(\ell_i)}}\varphi_{\alpha_i^{(\ell_i-1)}}\cdots\varphi_{\alpha_i^{(1)}}$ 为 0。否则，存在某个指标集 I 以及该指标集的某个元素 i，使得 $\varphi_{\alpha_i^{(\ell_i)}}\varphi_{\alpha_i^{(\ell_i-1)}}\cdots\varphi_{\alpha_i^{(1)}}$：$M\varepsilon_{\mathfrak{s}(\alpha_i^{(1)})}\to M\varepsilon_{\mathfrak{t}(\alpha_i^{(\ell_i)})}$ 非 0，这意味着 $\wp_i$ 只能是 $\wp_{[\imath,\jmath]}$ 的某条子路径。这与已知条件矛盾。因此右 $\Bbbk\mathcal{Q}$-作用 $M\times\Bbbk\mathcal{Q}\to M$ 同时也是右 A-作用 $M\times A\to M$。这就诱导了一个函子 $\boldsymbol{F}_{\text{emb}}$: mod-$\Bbbk\mathcal{Q}'\to$mod-$A$，满足 $\boldsymbol{F}_{\text{emb}}(M)=M$。该函子自然地将 mod-$\Bbbk\mathcal{Q}'$ 视作了 mod-A 的一个满子范畴，因而是 $\Bbbk$-范畴之间的嵌入。对于左模情形的证明与右模情形的证明对偶。□

例 4. 设 $A^{(i)}=\Bbbk\mathcal{Q}^{(i)}/\mathcal{I}^{(i)}$，其中 $i=1,2$，$\mathcal{Q}^{(1)}=\mathcal{Q}^{(2)}=$



$\mathcal{I}^{(1)}=\langle ab\rangle$，$\mathcal{I}^{(2)}=\langle ab-cd\rangle$。对于 $A^{(1)}$，其箭图有一个 $\mathbb{A}_3$ 型子箭图 $\mathcal{Q}'=1\xrightarrow{c}3\xrightarrow{d}4$。对于任意右 $\Bbbk\mathcal{Q}'$-模 M，设 M 对应的箭图表示为 $V_1\xrightarrow{\varphi_c}V_3\xrightarrow{\varphi_d}V_4$，其中 V_t 是 $\Bbbk$-向量空间，维数 $\dim V_t$ = $\dim_{\Bbbk}M\varepsilon_t$ ($t=1,3,4$)。则 M 自然地被看作右 $A^{(1)}$-模 $M=V_1\oplus 0\oplus V_2\oplus V_4$,其对应的表示如下所示:



但是 M 不能被看作右 $A^{(2)}$-模，这是因为由 $A^{(2)}$ 的定义，可知 $ab-cd\in\mathcal{I}^{(2)}$，这蕴含了 $\varphi_b\varphi_a-\varphi_d\varphi_c=0$。然而对于 M 所诱导的向量空间 M 而言，右 $A^{(2)}$-作用未必能保证交换性 $\varphi_b\varphi_a=\varphi_d\varphi_c$。

引理 2. 设有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图 $\mathcal{Q}$ 包含 $\mathbb{A}_2$ 型子箭图。则 A 是含强零张量因子代数。

证. 本证明将构造两个非零的不可分解模 $M = M_A \in \mathsf{ind}(A\text{-}\mathsf{mod})$ 以及 $N = {}_A N \in \mathsf{ind}(\mathsf{mod}\text{-}A)$，使得 $M \otimes_A N = 0$。记 $\mathcal{Q}$ 包含的 $\mathbb{A}_2$ 型子箭图为 $\mathcal{Q}' = v \xrightarrow{\alpha} w$。考虑右 $\Bbbk\mathcal{Q}'$-内射模 $E(v)_{\Bbbk\mathcal{Q}'} = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}((\Bbbk\mathcal{Q}')\varepsilon_v, \Bbbk) \cong \Bbbk\varepsilon_v$ 和左 $\Bbbk\mathcal{Q}'$-内射模 ${}_{\Bbbk\mathcal{Q}'}E'(w) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}((\Bbbk\mathcal{Q}')\varepsilon_w, \Bbbk) \cong \Bbbk\varepsilon_w$。有

$$E(v) \otimes_{\Bbbk\mathcal{Q}'} E'(w) \cong \Bbbk\varepsilon_v \otimes_{\Bbbk\mathcal{Q}'} \Bbbk\varepsilon_w = \Bbbk(\varepsilon_v \otimes_{\Bbbk\mathcal{Q}'} \varepsilon_w) = 0.$$

由**引理 1** 中的函子 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}$: $\mathsf{mod}\text{-}\Bbbk\mathcal{Q}' \to \mathsf{mod}\text{-}A$ 以及 ${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}$: $\Bbbk\mathcal{Q}'\text{-}\mathsf{mod} \to A\text{-}\mathsf{mod}$，我们构造了右 A-模 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}(E(v))$ 和左 A-模 ${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w))$。由于 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}$ 和 ${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}$ 是嵌入，可知 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}(E(v))$ 和 ${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w))$ 都是非零的。下面证明 ${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w)) \otimes_A \boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}(E(v)) = 0$。注意在 $\mathsf{ind}(A\text{-}\mathsf{mod})$ 中，${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w))$ 同构于 $v \in \mathcal{Q}_0$ 对应的单模 ${}_A S(v)$，即

$${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w)) \cong {}_A S(v) \cong {}_A P(v) / \mathrm{rad}({}_A P(v)) \cong \Bbbk\varepsilon_v \oplus \bigoplus_{\substack{\wp \in \mathcal{Q}_{\geq 1} \\ t(\wp)=v}} \Bbbk\wp \Big/ \bigoplus_{\substack{\wp \in \mathcal{Q}_{\geq 1} \\ t(\wp)=v}} \Bbbk\wp$$

(注意左 A-投射模 ${}_A P(v) = A\varepsilon_v$ 由以 v 结尾的路径决定)。

同理，

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}(E(v)) \cong S(w) \cong P(w) / \mathrm{rad}P(w) \cong \Bbbk\varepsilon_w \oplus \bigoplus_{\substack{\wp \in \mathcal{Q}_{\geq 1} \\ s(\wp)=w}} \Bbbk\wp \Big/ \bigoplus_{\substack{\wp \in \mathcal{Q}_{\geq 1} \\ s(\wp)=w}} \Bbbk\wp$$

(注意右 A-投射模 $P(w)_A = \varepsilon_w A$ 由以 w 开始的路径决定)。

从而，作为 $\Bbbk$-向量空间而言，利用张量的运算性质，有如下同构:

$$\begin{aligned}
&{}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w)) \otimes_A \boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}(E(v)) \\
&\cong_{\Bbbk} \Big(\Bbbk\varepsilon_v \oplus \bigoplus_{\substack{\wp \in \mathcal{Q}_{\geq 1} \\ t(\wp)=v}} \Bbbk\wp \Big/ \bigoplus_{\substack{\wp \in \mathcal{Q}_{\geq 1} \\ t(\wp)=v}} \Bbbk\wp \Big) \otimes_A \Big(\Bbbk\varepsilon_w \oplus \bigoplus_{\substack{\wp \in \mathcal{Q}_{\geq 1} \\ s(\wp)=w}} \Bbbk\wp \Big/ \bigoplus_{\substack{\wp \in \mathcal{Q}_{\geq 1} \\ s(\wp)=w}} \Bbbk\wp \Big) \\
&= \Big(\Bbbk\varepsilon_v \oplus \bigoplus_{\substack{\wp \in \mathcal{Q}_{\geq 1} \\ t(\wp)=v}} \Bbbk\wp \Big) \otimes_A \Big(\Bbbk\varepsilon_w \oplus \bigoplus_{\substack{\wp \in \mathcal{Q}_{\geq 1} \\ s(\wp)=w}} \Bbbk\wp \Big) \Big/ \Big\langle \bigoplus_{\substack{\wp \in \mathcal{Q}_{\geq 1} \\ t(\wp)=v}} \Bbbk\wp, \bigoplus_{\substack{\wp \in \mathcal{Q}_{\geq 1} \\ s(\wp)=w}} \Bbbk\wp \Big\rangle \\
&= \Big(\Bbbk\varepsilon_v \otimes_A \Bbbk\varepsilon_w \Big) \Big/ \Big\langle \bigoplus_{\substack{\wp \in \mathcal{Q}_{\geq 1} \\ t(\wp)=v}} \Bbbk\wp, \bigoplus_{\substack{\wp \in \mathcal{Q}_{\geq 1} \\ s(\wp)=w}} \Bbbk\wp \Big\rangle
\end{aligned}$$

(注意 $\bigoplus_{\substack{\wp \in \mathcal{Q}_{\geq 1} \\ t(\wp)=v}} (\Bbbk\wp \otimes \Bbbk\varepsilon_w) = 0$，$\bigoplus_{\substack{\wp \in \mathcal{Q}_{\geq 1} \\ s(\wp)=w}} (\Bbbk\varepsilon_v \otimes \Bbbk\wp) = 0$ 以及 $\bigoplus_{\substack{\wp_1, \wp_2 \in \mathcal{Q}_{\geq 1} \\ t(\wp_1)=w,\, t(\wp_2)=v}} (\Bbbk\wp_1 \otimes \Bbbk\wp_2) = 0$)

$$\cong_{\Bbbk} \Bbbk\varepsilon_v \otimes_A \Bbbk\varepsilon_w = 0.$$

由此可见 A 有强零张量因子 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}(E(v))$ 和 ${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w))$。□

根据**引理 2**，我们立刻得到下述推论。

推论 1. 设 $\mathcal{Q}$ 是连通箭图且包含至少两个顶点。则有限维代数 $A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是含强零张量因子代数。

证. 由箭图的连通性可知存在两个顶点 v 和 w，二者被某个箭向 α 相连。而 v，w 和 α 诱导了 $\mathcal{Q}$ 的 $\mathbb{A}_2$ 型子箭图，由**引理 2**，可知推论成立。□

引理 3. 设有限维代数 $A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图 $\mathcal{Q}$ 包含 loop $\mathcal{C} = \overset{\alpha}{\circlearrowright} 1$，且存在正整数 ω，使得 $\alpha^{\omega} \notin \mathcal{I}$。则存在 $\Bbbk$-范畴的嵌入

$${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}^{o} : \Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^{\omega}\rangle\text{-}\mathsf{mod} \to A\text{-}\mathsf{mod} \text{ 以及 } \boldsymbol{F}^{o}_{\mathrm{emb}} : \mathsf{mod}\text{-}\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^{\omega}\rangle \to \mathsf{mod}\text{-}A,$$

该嵌入自然地将左/右 $\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^{\omega}\rangle$-模视作左/右 A-模。

证. 任意右 $\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^{\omega}\rangle$-模的箭图表示是二元组 (V, φ_α)，其中 V 是 $\Bbbk$-向量空间，右 $\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^{\omega}\rangle$-作用由 $\Bbbk$-线性变换 $\varphi_\alpha \in \mathrm{End}_{\Bbbk}V$ (其中，$\varphi_\alpha^{\omega} = 0$) 按照 $V \times \Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^{\omega}\rangle \to V$，$v\alpha := \varphi_\alpha(v)$ 给出。取 $V := \bigoplus_{i \in \mathcal{Q}_0} V_i$，其中 $V_i = V$，如果 $i = 1$；否则，即 $i \in \mathcal{Q}_0 \setminus \{1\}$ 时，取 $V_i = 0$。则 $(V, \varphi_a)_{a \in \mathcal{Q}_1}$ 决定了 V 是一个右 A-模，其中，

$$\varphi_a = \begin{cases} \varphi_\alpha, & a = \alpha; \\ 0, & \text{其它情形}. \end{cases}$$

取 $\boldsymbol{F}^{o}_{\mathrm{emb}}(V) \cong V$，则 $\boldsymbol{F}^{o}_{\mathrm{emb}}$ 自然地将每一个右 $\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^{\omega}\rangle$-模看成了右 A-模，易见 $\boldsymbol{F}^{o}_{\mathrm{emb}}$ 诱导了一个 $\Bbbk$-范畴

的嵌入。□

注意上述证明无需讨论 α^{ω} 是否是 $\mathcal{I}$ 的生成元的求和分量。事实上，如果存在 $\sum_{i\in I} k_i \wp_i \in \mathcal{I}$ (其中 $\mathfrak{s}(\wp_i)=\mathfrak{t}(\wp_i)=1$)，使得 $\alpha^{\omega}=\wp_j \quad (j\in I)$，仍然考虑**引理 3** 的证明中所构造的 $(V,\varphi_a)_{a\in\mathcal{Q}_1}$，此时 $\varphi_{\sum_{i\in I}k_i\wp_i}=\sum_{i\in I}k_i\varphi_{\wp_i}=0$ 是自然成立的，因此 $(V,\varphi_a)_{a\in\mathcal{Q}_1}$ 仍是右 A-模。如果 α^{ω} 不是任何 $\mathcal{I}$ 的生成元的求和分量，则**引理 3** 成立的理由与**引理 1** 一致。特别地，以 $\omega=2$ 的情形作为一个例子: $\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^2\rangle$ 上的不可分解右模只有单模 $S(1)$ 和投射-内射模 $P(1)\cong E(1)$。其对应地看成右 A-模，则分别是右 A-单模 $S(1)_A$ 和不可分解右 A-模 $\Bbbk\varepsilon_1+\Bbbk\alpha$。在这个观点下，**引理 3** 是明确的。

引理 4. 设有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图 $\mathcal{Q}$ 是 loop。则 A 是无强零张量因子代数。

证. 设 $\mathcal{Q}=$ x ◯ 1，则 $A\cong\Bbbk[x]/\mathcal{I}$。因此任意左/右 A-模自然地也是左/右 $\Bbbk[x]$-模，即，存在 $\Bbbk$-范畴的嵌入函子 $\boldsymbol{F}:\text{mod-}A\to\text{mod-}\Bbbk[x]$。任取非零的有限生成右 A-模 M 和左 A-模 N，由 A 是交换代数，自然地有 $M\otimes_A N$ 也是右 A-模。加之 $\boldsymbol{F}$ 是嵌入，因此 $\boldsymbol{F}(M)\neq 0$ 且 $\boldsymbol{F}(N)\neq 0$。故根据**命题 2**，$\Bbbk[x]$ 是无强零张量因子环，于是得 $\boldsymbol{F}(M\otimes_A N)=\boldsymbol{F}(M)\otimes_{\Bbbk[x]}\boldsymbol{F}(N)\neq 0$。再次利用 $\boldsymbol{F}$ 是嵌入，得 $M\otimes_A N\neq 0$。□

推论 2. 设 $\mathcal{Q}$ 是包含 loop 的箭图 (可以是非连通箭图)。则有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是无强零张量因子代数当且仅当 $\mathcal{Q}$ 自身是 loop。

证. 引理 4 给出了充分性"$\Leftarrow$"，**引理 2** 给出了必要性"$\Rightarrow$"。

定理 1. 设非单的有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图是连通箭图，且该箭图只包含至多 1 个 loop。则 A 是无强零张量因子代数当且仅当 A 同构于一元多项式环的商 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$ (其中，$\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 都是 admissible 理想)。

证. 设 A 无强零张量因子，则由**推论 1**，A 的箭图 $\mathcal{Q}$ 只含有一个顶点，记此顶点为 1。此时必有 $\mathcal{Q}=$ x ◯ 1。因此，$A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}\cong\Bbbk[x]/\mathcal{I}$，这里取 $\mathcal{J}=\mathcal{I}$。反之，若 $A\cong\Bbbk[x]/\mathcal{J}$，则由 $\mathcal{J}$ 是 admissible 理想，可知 A 的箭图是一个 loop。根据**推论 2**，A 没有强零张量因子。□

2.2 有限维代数的含/无弱零张量因子性

本节将考虑代数的弱零张量因子。在 2.1 节中，我们指出连通的有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图如果含有至多 1 个 loop，则 A 含强零张量因子当且仅当 A 的箭图 $\mathcal{Q}$ 不是 loop (见**定理 1**)。因此，根据**命题 1**，立刻有下面结果。

推论 3. 如果连通的有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图 $\mathcal{Q}$ 不是 loop，A 必定含有弱零张量因子。

下面命题考虑了 A 的箭图 $\mathcal{Q}$ 是 loop 的情形，此时 A 同构于 $\Bbbk[x]$ 的商 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$，由 $\sharp\mathcal{Q}_0=1$ 可知 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$ 有唯一的不可分解投射左/右 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$-模 $P=\varepsilon_1 A$。我们将利用 P 指出此时的 A 依然含有弱零张量因子。

命题 3. 有限维代数 $A=\Bbbk[x]/\mathcal{J}$ 是含弱零张量因子代数[1]。

证. 首先，A 有唯一的不可分解投右/左 A-射模 $P=\varepsilon_1 A\cong_A \sum_{i=0}^{t-1}\Bbbk x^i \cong_{\Bbbk} A\varepsilon_1 = A$。则张量 $\varepsilon_1 A\otimes_A A\varepsilon_1$ 可通过如下同构约化:

$$\sigma:\varepsilon_1 A\otimes_A A\varepsilon_1 = A\otimes_A A \xrightarrow{\cong} A.$$

注意到 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$ 是主理想整环，所以存在 $f(x)=k_2x^2+k_3x^3+\cdots+k_tx^t\in\Bbbk[x]$ ($t\geq 2$)，使得 $\mathcal{J}=\langle f(x)\rangle$。所以 $f(x)$ 存在一个形如 $f(x)=x\varphi(x)$ 的分解，其中 $\varphi(x)$ 是域 $\Bbbk$ 上的 $t-1$ 次多项式。显

---

[1] 此命题不要求域 $\Bbbk$ 是代数闭的.

然，在代数 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$ 中，$x\neq 0$ 且 $\varphi(x)\neq 0$，但 $f(x)=x\varphi(x)\in\mathcal{J}=\langle f(x)\rangle$。这就构造了张量 $\varepsilon_1 A\otimes_A A\varepsilon_1$ 中的元素 $x\otimes\varphi(x)$，使得 $\sigma(x\otimes\varphi(x))=x\varphi(x)\overset{在\Bbbk[x]/\mathcal{J}中}{=\!=\!=}0$，进而得到 $x\otimes\varphi(x)\overset{在A中}{=\!=}0$。□

由**推论 3** 和**命题 3**，我们得到下面定理。

定理 2. 有限维代数总是含弱零张量因子代数。

3 主要结论

下面，我们给出本文的主要结论。

定理 3. 设 $\Bbbk$-代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 非单，其箭图连通且只包含至多 1 个 loop。

(1) 如果 A 是有限维代数，则下面论述等价:

(a) A 是含强零张量因子代数;

(b) $\sharp\mathcal{Q}_0\geq 2$；

(c) $\mathcal{Q}$ 或者包含一个 loop 为真子箭图，或者不含 loop。

(2) 如果 A 是无弱零张量因子代数，则 A 是无限维代数。

证. (1) (a)$\Rightarrow$(b): 反设 A 的箭图 $\mathcal{Q}$ 只有一个顶点，则 $\mathcal{Q}$ 只能是 1 个 loop，根据**定理 1**，A 无强零张量因子，矛盾。(b)$\Rightarrow$(c): 由 $\mathcal{Q}$ 包含至多 1 个 loop 可知此为显然的。(c)$\Rightarrow$(a): 如果 $\mathcal{Q}$ 不含 loop，或者 $\mathcal{Q}$ 包含 loop 并以此 loop 为真子箭图，均可知 $\mathcal{Q}$ 不是 loop，自然地，在同构意义下，A 不是形如 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$ 形式的代数。根据**定理 1**，可知 A 含强零张量因子。

(2) 取**定理 2** 的逆否命题即可。

注意非单且无弱零张量因子代数是存在的，见**例 5**。

例 5. 考虑多项式环 $A=\Bbbk[x_i\mid i\in\mathbb{N}]$，并任取多项式 $f(x_1,\cdots,x_m)\in A$ 和 $g(x_1,\cdots,x_n)\in A$ 使得

$$f(x_1,\cdots,x_m)g(x_1,\cdots,x_n)=0.$$

则由 $\Bbbk$ 是域可知 A 是无零因子环，进而有 $f(x_1,\cdots,x_m)=0$ 或者 $g(x_1,\cdots,x_n)=0$。注意对于一般的多项式环 $R[x_i\mid 1\leq i\leq n]$ $(n\in\mathbb{N})$（R 是环)，上式未必能使得 $f(x_1,\cdots,x_m)=0$ 或者 $g(x_1,\cdots,x_n)=0$。例如，取 $R=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$，$n=2$，并令 $f(x_1,x_2)=3x_1+3x_2+3x_1x_2\neq 0$，$g(x_1,x_2)=2x_1\neq 0$. 则 $f(x_1,x_2)g(x_1,x_2)=0$。

致谢. 感谢两位审稿人对本文的细致审稿以及他们为本文提出的宝贵建议。同时，本文的第三作者感谢张亚峰老师为本文提出的一些修改意见。

参 考 文 献

[1] HERSCHEND M. Tensor products on quiver representations [J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*，**1**(212): 452－469, 2008. .

[2] HERSCHEND M. Solution of the Clebsch-Gordan problem for Kronecker representations. PhD Thesis. Uppsala: Uppsala University, 2003.

[3] HERSCHEND M. Solution to the Clebsch-Gordan problem for representations of quivers of type $\tilde{A}_n$ [J]. *Journal of Algebra and Its Applications*, **4**(5):481－488, 2005.

[4] HERSCHEND M. Galois coverings and the Clebsch-Gordon problem for quiver representations [J]. *Colloquium Mathematicum*, **109**(2):193－215, 2007.

[5] MARTSINKOVSKY A, VLASSOV A. The representation ring of *k*[x] [EB/OL] (2023-9-29). Preprint, 2004.

[6] BAO Y H. The quiver method on the representation theory of tensor product algebras and hereditary algebras (in Chinese). PhD Thesis. Innsbruck: Anhui University, 2010.

[7] LIU Y-Z, ZHANG Y F. Sufficient and necessary conditions for the multiple tensors of algebras of type A to berepresentation-finite (in Chinese) [EB/OL] (2023-9-29). *Science Sinica Mathematics*, publish oline, 2023.

[8] BUCHWEITZ R-O, GREEN E L, MADSEN D, SOLBERG O. Finite hochschild cohomology without finite global dimension [J]. *Mathematical research letters*, **12**:805－816，2005.

[9] Happel D. Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras. In: *Séminaire d’Algébre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin*, 1989. Lecture Notes in Mathematics，vol. 1404. Berlin-Heidelberg: Springer, 2006, 108–126.

[10] HU W, LUO X-H, XIONG B-L, ZHOU G D. Gorenstein projective bimodules via monomorphism categories and filtration categories [J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **233**(3): 1014–1039, 2019.
[11] HOCHSCHILD G. On the cohomology groups of an associative algebra [J]. *Annals of Mathematics*, 46: 58–67, 1945.
[12] MAHDOU N，TAMEKKANTE M. On Gorenstein global dimension of tensor product of algebras over a field [J]. *Gulf Journal of Mathematic*s, **3**: 30–37, 2015.
[13] ROTMAN J J. *An Introduction to Homological Algebra (Second Edition)* [M]. New York: Springer, 2009. ISBN: 978-0-387-24527-0.